ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

LA TRẦN THÙY TRANG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 01/2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

LA TRẦN THÙY TRANG

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. TRẦN XUÂN QUÝ
TS. ĐỖ THỊ PHƯƠNG QUỲNH

THÁI NGUYÊN, 01/2021

Mục lục

Danh sách kí hiệu viết tắt

AM-GM	Arithmetic mean - Geometric mean
APMO	Asian Pacific Mathematiccal Olympiad
IMO	Internetional Mathematiccal Olympiad
$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên bỏ đi phần tử 0
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{Z}$	Tập hợp các số nguyên
$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$	Tổng các số hạng từ x_1 đến x_n
$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$	Tích các số hạng từ x_1 đến x_n
C_n^k hay $\binom{n}{k}$	Số tổ hợp chập k của n, có giá trị bằng $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	Đạo hàm riêng theo biến x
$\log x$	Logarit cơ số thập phân của x
$\psi(x_1, \ldots, x_n)$	Hàm số n biến ψ theo biến x_1 đến x_n
$\exp(x)$	e^x
$\max(P)$	Giá trị lớn nhất của P
$\min(P)$	Giá trị nhỏ nhất của P

Mở đầu

Bất đẳng thức là một đề tài thú vị, có ý nghĩa quan trọng trong Toán học. Ngày nay việc tìm lời giải đúng của các bài toán trong các lĩnh vực như: kỹ thuật, kinh tế, …trở thành phổ biến do có sự hỗ trợ mạnh mẽ của máy tính. Việc làm đó đòi hỏi ta ước lượng đánh giá để thu được lời giải gần đúng cần thiết. Trong trường phổ thông các bài toán bất đẳng thức (hay bài toán so sánh) luôn được khai thác để đưa vào rèn luyện tư duy sáng tạo của học sinh. Đặc biệt trong các kì thi học sinh giỏi các cấp thì chủ đề bất đẳng thức hầu như luôn xuất hiện trong các đề thi.

Trong toán học trung học phổ thông, bất đẳng thức được đưa vào chương trình dạy học của Đại số 10. Trong đó có giới thiệu và giảng dạy một số định lý, hệ quả, bài toán ứng dụng liên quan đến bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho hai số dương a, b: $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Chuyên đề của bất đẳng thức khá rộng liên quan đến nhiều khía cạnh toán học. Với phạm vi luận văn thạc sĩ Toán học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân (hay còn gọi là bất đẳng thức AM - GM), tôi tìm hiểu về dạng bất đẳng thức AM - GM, tìm mối liên hệ với các lớp bất đẳng thức sơ cấp và một số dạng toán vận dụng trong chương trình phổ thông và ứng dụng của bất đẳng thức này trong việc giải các bài toán đại số sơ cấp, tôi đã lựa chọn đề tài "Về bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân và một số bài toán liên quan" dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Xuân Quý và TS. Đỗ Thị Phương Quỳnh.

Nội dung của đề tài luận văn dự kiến viết trong hai chương.

Chương 1 trình bày về bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân và một số ví dụ vận dụng cơ bản và kỹ thuật Cauchy ngược dấu. Nội dung chương này được tham khảo từ các tài liệu [1]-[3].

Chương 2 trình bày về làm chặt bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức trung bình với trọng số hỗn hợp. Nội dung chương này được tham khảo từ các tài liệu [1] và [4]-[11].

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của TS. Trần Xuân Quý và TS. Đỗ Thị Phương Quỳnh. Em xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của em đối với những điều thầy đã dành cho em.

Em xin chân thành cảm ơn Khoa Toán - Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K13 (2018 - 2020), Trường đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho em hoàn thành khóa học.

Tôi xin cảm ơn Ban Giám hiệu Trường THPT Na Rì, Na Rì, Bắc Kạn đã tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè và đồng nghiệp, những người đã động viên, hỗ trợ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 01 năm 2021

Tác giả luận văn

La Trần Thùy Trang

Chương 1

Về bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân và một số bài toán liên quan

Nội dung chính của chương này sẽ trình bày một số bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân. Thông qua đó xây dựng một hệ thống bài tập điển hình để phục vụ cho công tác giảng dạy bất đẳng thức ở trung học phổ thông. Nội dung của chương này sẽ tham khảo chính trong các tài liệu về mảng bất đẳng thức liên quan tới đề tài của luận văn, cụ thể các tài liệu [1, 2, 3].

1.1 Bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân

Tên đề tài luận văn là "Về bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân và một số bài toán liên quan", tuy nhiên để ngắn gọn, bất đẳng thức này thường được gọi ngắn gọn là bất đẳng thức AM-GM khi vận dụng để giải toán. Do đó, để thống nhất trong toàn luận văn, ta gọi bất đẳng thức AM-GM thay vì gọi là "bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân".

Định lý 1.1.1 (Bất đẳng thức AM-GM)**.** *Với mọi số thực dương* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.1}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Chứng minh. Chứng minh bằng phương pháp qui nạp của Cauchy. Ta thấy bất đẳng thức hiển nhiên đúng với $n = 2$. Nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với $2n$ số vì

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2n} &\geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} + n\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}} \\ &\geqslant 2n\sqrt[2n]{x_1x_2\cdots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đúng khi n bằng một lũy thừa của 2. Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n thì cũng đúng với $n-1$. Thật vậy ta chỉ cần chọn:

$$x_n = \frac{S}{n-1}; \quad S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}.$$

Ta có

$$S + \frac{S}{n-1} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{x_1x_2\cdots x_{n-1}S}{n-1}}.$$

Từ đó suy ra

$$S \geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

Từ hai nhận xét trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng nhau. $\square$

Bất đẳng thức (1.1) có thể viết lại ở dạng sau

$$\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n \geqslant x_1^{1/n}x_2^{1/n}\cdots x_n^{1/n}. \tag{1.2}$$

Từ ý tưởng này, người ta đã đưa ra bất đẳng thức AM-AG suy rộng dạng sau.

Định lý 1.1.2. *Với $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ và $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0,1]$ thỏa mãn*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Ta có bất đẳng thức sau

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \geqslant x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}. \tag{1.3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bất đẳng thức (1.3) có thể mở rộng dạng sau.

Định lý 1.1.3. *Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Khi đó*

$$\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \geqslant x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Đặt

$$s = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Vận dụng bất đẳng thức quen thuộc $e^{x-1} \geqslant x$ với mọi x (dấu bằng xảy ra khi $x = 1$) ta thu được

$$e^{x_1/s-1} \geqslant x_1/s, e^{x_2/s-1} \geqslant x_2/s, \ldots, e^{x_n/s-1} \geqslant x_n/s.$$

Từ đó ta có

$$s^{p_1}e^{(x_1/s-1)p_1} \geqslant x_1^{p_1}, s^{p_2}e^{(x_2/s-1)p_2} \geqslant x_2^{p_2}, \ldots, s^{p_n}e^{(x_n/s-1)p_n} \geqslant x_n^{p_n}.$$

Nhân từng vế của các bất đẳng thức này ta được

$$s^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \geqslant x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1/s = x_2/s = \cdots = x_n/s = 1$, hay $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Từ bất đẳng thức AM-GM suy rộng ta có

$$x^a y^b \leqslant \frac{a}{a+b}x^{a+b} + \frac{b}{a+b}y^{a+b} \tag{1.5}$$

với mọi $x, y \geqslant 0, a, b > 0$. Nếu đặt $u = x^a, v = y^b, p = (a+b)/a$ và $q = (a+b)/b$, rõ ràng $p > 1$ và ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q. \tag{1.6}$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Young. Kết quả dưới đây được gọi là bất đẳng thức Hölder.

Định lý 1.1.4 (Bất đẳng thức Hölder)**.** *Cho hai bộ số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là hai bộ số n số thực dương và $p > 1$, thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.7}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_i^p = kb_i^q$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder ở dạng giải tích, chúng tôi chỉ trình bày kết quả mà không chứng minh.

Định lý 1.1.5 (Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích)**.** *Giả sử* $p, q > 1$ *thỏa mãn* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* f *và* g *là hai hàm số liên tục trên đoạn* $[a, b]$*, khi đó*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.8}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A *và* B *không đồng thời bằng không sao cho*

$$A|f(x)|^p = B|g(x)|^q, \quad \forall x \in [a, b].$$

1.2 Một số ví dụ vận dụng bất đẳng thức AM-GM

Trước tiên, để minh họa cho việc vận dụng bất đẳng thức AM-GM, chúng tôi trình bày các dạng bài toán cơ bản sau (các bài toán này được tham khảo trong tài liệu [1] của tác giả Phạm Kim Hùng).

1.2.1 Một số vận dụng cơ bản

Ví dụ 1.2.1. Cho ba số thực a, b, c đều dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Bất đẳng thức tổng quát hơn được chứng minh hoàn toàn tương tự

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □